Analisi, scritto del 5 febbraio 2020 , Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi

Nome: *Cognome:* *Matricola:*

Fila B

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–4: risposta giusta =1, risposta non data = 0, risposta sbagliata = $-\frac{1}{2}$. Esercizi 5–6: punti 0–8.

Esercizio 1 Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ diversa dalla funzione nulla e si consideri l'equazione differenziale $w'' + 3w' + 2w = f(x)$.

1. Se $f(x) = 3\sin(2x) + 1$, allora $y(x) = -2e^x - 4\sin(2x) + 3$ è una soluzione. V F
2. Se le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione, allora $2y_1(x) + 3y_2(x)$ è soluzione. V F
3. Se f è costante, allora esiste un'unica soluzione y costante. V F
4. Se y è soluzione dell'equazione omogenea, allora $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$. V F

Esercizio 2 Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile

1. Se $f(x) \geq 0$, la funzione $g(x) = \sqrt{f(x)}$ è continua. V F
2. Se $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) > 0$, allora la funzione $g(x) = |f(x)|$ è derivabile in x_0 . V F
3. Se $f(x) > 0$ la funzione $f(x)^3 - 1$ è crescente. V F
4. Se f è periodica e non costante, allora esiste finito $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{f(x)}$. V F

Esercizio 3 Per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente ad un certo $a \in \mathbb{R}$ si ha:

1. Se $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora $a \geq 0$. V F
2. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{a_n}}{\sqrt{1+n^2}}$ è convergente. V F
3. La successione $(e^{-a_n} + e^{a_n})$ diverge a $+\infty$. V F
4. La successione $\cos(a_n)$ ammette limite finito. V F

Esercizio 4 Sia $f(x)$ una funzione convessa di classe C^1 in $\mathbb{R}$

1. Se esistono $x_1 > x_0$ tali che $f(x_1) < f(x_0)$ allora $f(x)$ è illimitata inferiormente V F
2. Se esistono $x_1 > x_0$ tali che $f(x_1) = f(x_0)$ allora $f(x)$ ha massimo assoluto V F
3. Se $f(x)$ è monotona decrescente allora è illimitata superiormente V F
4. Se $f(x)$ non è costante e ha un punto di minimo assoluto allora è illimitata superiormente V F

Esercizio 5 Data la funzione $f(x) = 4e^{\frac{x-2}{x}}$ determinare

1. il dominio ed eventuali asintoti di f;
2. il (valore) massimo e minimo di f in $[1, 5]$;
3. Disegnare un grafico qualitativo della funzione f:
4. Trovare eventuali punti di minimo o massimo relativo per la funzione $g(x) = \frac{x-1}{x} f(x)$.

Esercizio 6 Siano $\alpha \geq 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ e sia $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_{\alpha,\beta}(x) := |x|^\alpha e^{\beta x^2}$.

1. Per $\alpha = 1$, $\beta = 2$ calcolare $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.
2. Per $\alpha = 2$, $\beta = 2$ calcolare $\int_0^4 f(x)\,dx$.
3. Determinare per quali $\alpha \geq 0\ \ \beta \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.
4. Determinare per quali $\alpha \geq 0\ \ \beta \in \mathbb{R}$ esiste infinito l'integrale (in senso improprio) $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx$.